

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

二維異向性複合層板之動態分析與研究

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC92-2212-E-032-015-

執行期間：92 年 08 月 01 日至 93 年 07 月 31 日

執行單位：淡江大學航空太空工程學系(所)

計畫主持人：應宜雄

計畫參與人員：鍾煥生、林世皓、郭詮、蔡忠翰

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 93 年 9 月 16 日

一、前言與研究目的

傳統波動力學研究主要著重於波傳行為的學理探討，近五十年來，為使理論研究的成果能進一步模擬工程的真實應用問題，使得應力波的基礎研究更加困難。對於本文之研究動機，在於異向性複合層域介質所構成的材料結構，是日常應用所常見的，因此，若能完成多層域的層板研究，將可對於學術研究或實際應用上提供參考價值。而應力波的實際應用範疇非常廣泛，諸如以超音波進行非破壞檢測或材料常數量測、地震波的動力分析與地震波源位置的計算、地層結構之研究、地下石油天然氣之探勘、複合材料之動力與破壞分析等。由此可知，波動力學研究的完善與否，對於人類的生活將有深遠的影響力。為了進一步探究影響介質材料之暫態解趨近於穩態解的原因，本文擬同時解析異向性層域材料受反平面動力簡諧載荷時的暫態與穩態響應，詳細討論暫態解趨近穩態解的變化過程，如此，對瞭解層域複合材料的基礎應用理論將有很大助益。

二、文獻探討

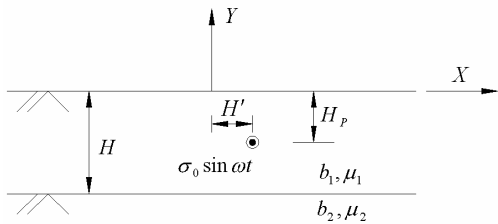
關於層域介質問題，Thomson(1950)與 Haskell(1953)為研究地球層狀地質的波傳現象，提出了轉移矩陣的方法來處理多層介質的頻散方程式(dispersion equation)。Kennett and Kerry(1979)提出反射矩陣法(reflected matrix method)來分析多層介質受一般性載荷的暫態問題，將整個暫態響應以反射或折射矩陣來表示。為避免直接解多層介質的邊界值問題，Spencer(1960)提出了廣義射線路徑(generalized ray path)來處理邊界反射與折射的問題，他利用所求出的邊界反射與折射係數來處理多層介質中的所有的波，並將之做有系統的排序與整理，如此可避免直接解多層介質的邊界值問題。廣義射線理論將層狀介質中的每個波再轉換域中都可表示成一射線積分式，其主要是由波源函數(source function)、介面間之反射與折射係數乘積(products of reflection and transmission coefficients)、接收函數(receiver function)與相函數(phase function)所構成，轉換域中的每個積分式可利用 Cagniard-de Hoop method(Cagniard(1939), de Hoop(1958))做逆轉換得到其暫態反應，而所有射線積分式的總和即構成了多層介質的暫態解析。Müller(1968a, 1968b, 1969)利用廣義射線理論來解多層介質承受不同負載的暫態問題。有別於直接利用廣義射線理論，對二維層狀介質之反平面與平面問題 Ma and Huang(1995, 1996)利用導出的層與層之間的通解寫出了表面受動力點波源的全場解，但細觀其解的形式，仍與廣義射線理論相同。

對於反平面異向性的問題，由於直接解此邊界值非常困難，所以一般都是利用座標轉換將異向性的問題先轉換成相對的等向性問題求解，然後再轉回異向性問題的對應解。對於異向性及等向性反平面的問題轉換關係，Horgan and Miller(1994)與 Ma(1996)有深入及詳細的討論，Yang and Ma(1998)更進一步將其應用在異向性的平面問題上。對異向性問題雖然可以利用座標轉換技巧將其轉換成等向性問題求解，但是對層域問題做轉換時則可能發生脫層或重疊現象，使得邊界條件發生不完美接合現象。Lin and Ma(2000)研究靜力問題，對多層介質作座標轉換時，提出了一修正項，使得由異向性幾何結構轉換至等向性時不會發生不連續脫層或重疊的現象，使得可以直接解相對應的等向性靜力問題。關於異向性多層介質的靜力問題所做的研究有 Bufler(1971)、Bahar (1972)、Small and Booker(1984)、Lin and Keer(1989)與 Choi and Tangjitham(1991)、與 Lin and Ma(2000)。

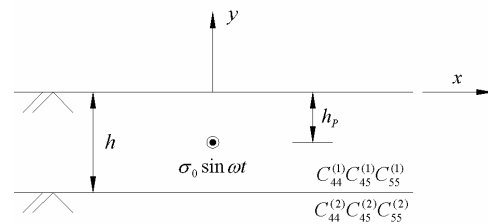
對動力波傳問題而言，當應力波遇到複合材料接合邊界時，會產生反射波與折射波，在複合層域材料域內，由於邊界數目不只一個，故應力波在材料內部會不斷地進行反射與折射，導致產生無窮多個波，如何對這無窮多個應力波進行整理歸納與計算，是個非常困難的問題。對於相對的異向性問題，Ing and Chen(2003)運用 Horgan and Miller(1994)與 Ma(1996)所提之座標轉換技巧將異向性問題轉換成相對之等向性問題，並利用 Lin and Ma(2000)所提出之邊界轉換技巧來處理邊界接合問題，再運用積分轉換法與矩陣展開法直接解此異向性層狀介質問題，並將轉換域中的解表示成矩陣形式，最後利用 Cagniard-de Hoop method 做逆轉換而得到時域解。

三、研究方法

本文利用拉普拉斯轉換將波動控制方程式轉換為在拉普拉斯轉換域的常微分方程式，再配合異向性半無窮域之邊界條件及初始條件，可解出在轉換域中的暫態解，最後利用 Cagniard-de Hoop method 作逆轉換而得到時域中的半平面暫態解，得到本文處理異向性問題的基本解。再運用座標轉換技巧，將反平面異向性問題轉換成相對之等向性問題。對於入射、反射及折射間的關係，考慮兩完美接合半無窮域問題，運用界面應力與位移連續條件，得到三者之關係式。除此，並以廣義射線理論說明 Ing and Chen(2003)中所獲得的單位步階函數解析解，其實是將每個入射波、反射波與折射波直接以數學形式表示的結果。對於暫態和穩態的理論解析，其中暫態解的部份利用 Ing and Chen(2003)中所獲得的單位步階函數解析解與時域簡諧波負載作摺積得到；而層域受時域簡諧負載的穩態解運用傳統波數積分表示法來解析，將所得之穩態解與 Liu and Ma(2002)所得之穩態解相互比較之。對於處理積分準確度的問題，在此，將運用 Xu and Mal(1985,1987)所提出的積分技巧。最後為了能詳細研究由暫態變化至穩態的過程，將以等向性薄層材料(圖一)與異向性薄層材料(圖二)為例做數值計算，觀察在不同觀察點、剪力模數比、慢度比或頻率之下，近場、中場與遠場的應力由如何由暫態逐漸趨近至穩態。



圖一

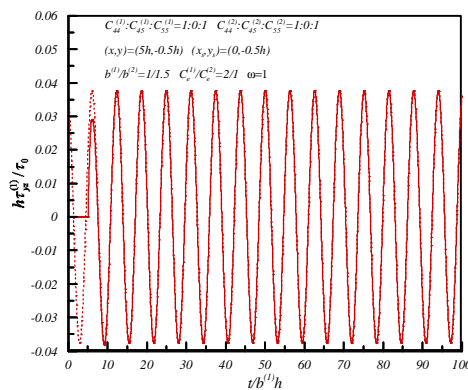


圖二

四、結果與討論

1. 等向性慢速下層材料問題：

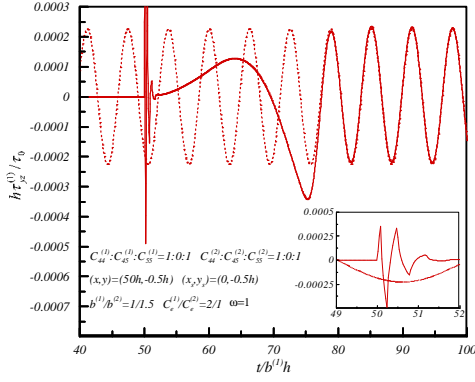
圖三為慢速下層材料近場之等向性暫態與穩態解，其中實線為暫態響應，而虛線為穩態響應，由於觀察點距離波源為 5 倍的板厚，所以入射波到達的時間為 $t/b^{(1)}h$ 等於 5.0。因為觀察點距離波源很近，前面幾個主波很快就會通過觀察點，暫態很快就能趨於穩態。



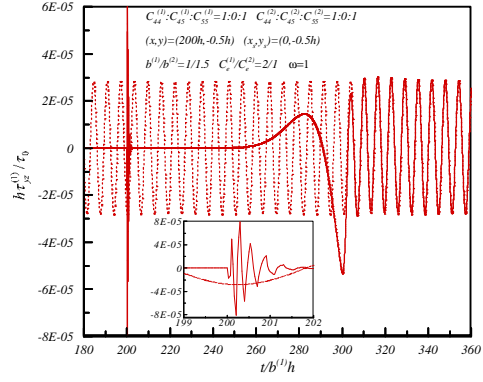
圖三

圖四、圖五分別為慢速下層材料中場與遠場之等向性暫態與穩態解，由於觀察點距離波源較遠，當入射波到達觀察點之後，在很短的時間內有很多個反射波也到達觀察點，其應力值會發生震盪。由圖五得知，當時間 $t/b^{(1)}h = 200$ 時，其暫態應力值開始震盪，當前多個反射波通過後，在時間 $t/b^{(1)}h$ 為 202 至 260 這段期間內，其應力值非常小且無變化，當時間 $t/b^{(1)}h$ 約等於 260 時，其應力值又開始變大；在 $t/b^{(1)}h = 300$ 之前，暫態應力值並無

明顯趨近穩態情形，在 $t/b^{(1)}h = 300$ 之後才趨近於穩態解。總之由圖三至五可發現，暫態應力值在 $t = b^{(2)}x$ 後即迅速趨近穩態解，此現象與 Liu and Ma(2002)所觀察之現象相同。

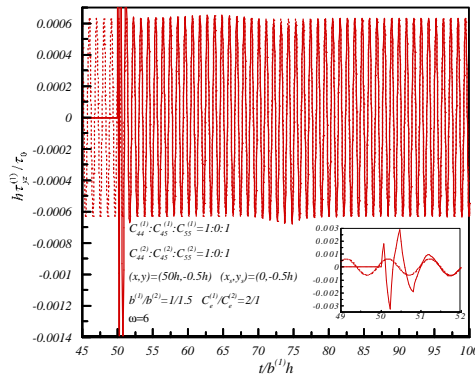


圖四

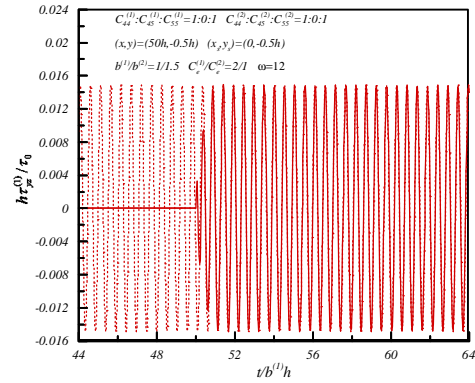


圖五

圖六與圖七主要是比較在不同頻率下，慢速下層材料中場之暫態與穩態解。隨著頻率由低頻至高頻，可以發現其應力值逐漸增大，且愈高頻，暫態解愈快趨於穩態解，圖六與七趨近於穩態解的時間都在 $t/b^{(2)}x$ 時間之前，所以可知對低頻的暫態解趨近穩態的過程，和 Ma *et al.*(2001)與 Ing and Chen(2003)所得結論相同，亦即受函數 $H(t)$ 影響較大；但是對高頻情況則受函數 $\sin \omega t$ 影響較大。



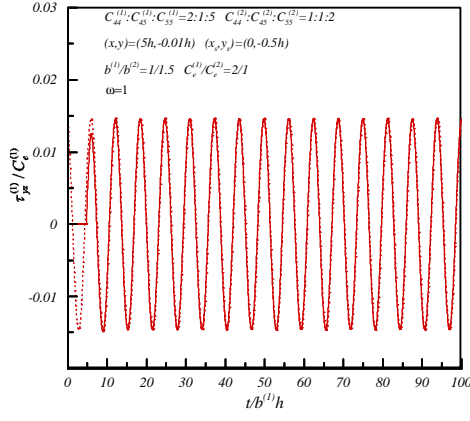
圖六



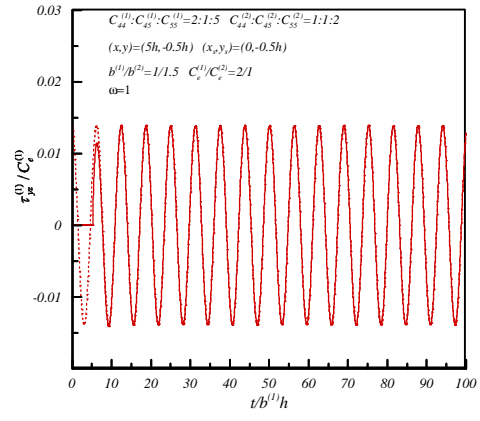
圖七

2. 異向性慢速下層材料問題：

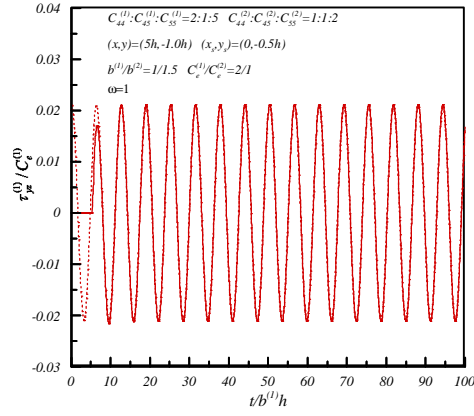
圖八至十為慢速下層材料在不同垂直高度觀察點下近場之暫態與穩態解，其觀察點在 x 軸方向距離波源皆為 5 倍的板厚。由於觀察點在 y 軸方向位置不同，經由座標轉換後，其厚度以及觀察點與波源的距離將有所改變，所以入射波與反射波到達的時間都不一樣，其應力值大小也都不同。由圖中可知觀察點愈接近上表面，其主波到達的時間愈早。且由於所有觀察點距離波源都很近，主波很快就通過觀察點，因此暫態很快就趨於穩態。



圖八

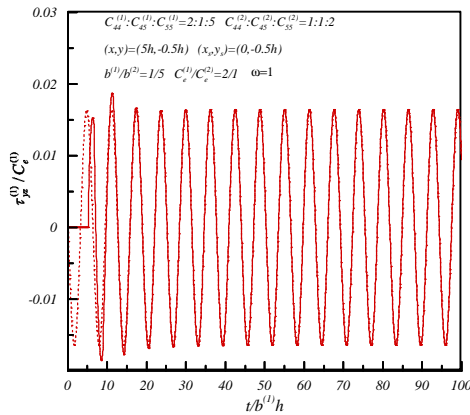


圖九

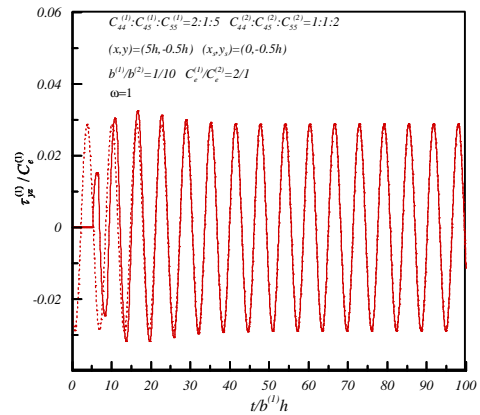


圖十

圖十一與圖十二為慢速下層材料在不同慢度 b 下近場之暫態與穩態解，當上層材料與下層材料的 $b^{(1)}/b^{(2)}$ 比值改變時，並不影響其入射波到達觀察點的時間。值得注意的是，隨著 $b^{(1)}/b^{(2)}$ 比值的減少，應力值會增加，且暫態趨於穩態所需的時間也增長。

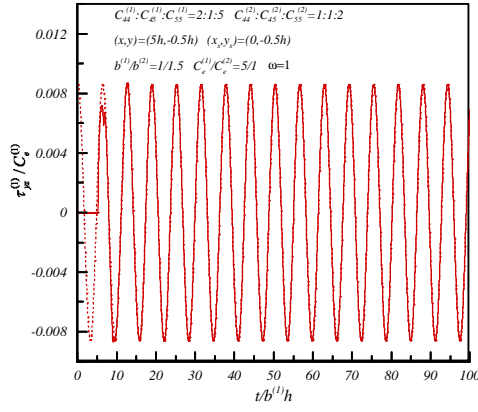


圖十一

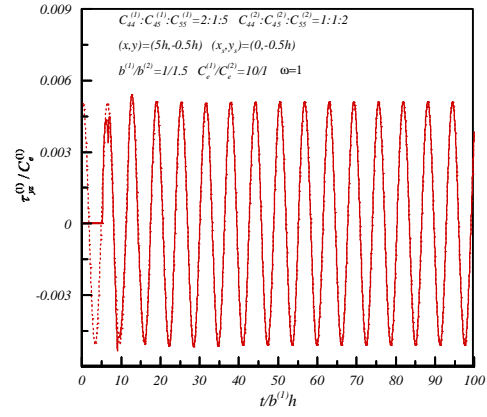


圖十二

圖十三與圖十四為慢速下層材料在不同 C_e 下近場之暫態與穩態解，當上層材料與下層材料的 $C_e^{(1)}/C_e^{(2)}$ 比值改變時，同樣不影響其入射波到達觀察點的時間。由圖十三與圖十四可知，隨著 $C_e^{(1)}/C_e^{(2)}$ 比值的增加，應力值會減少，且暫態趨於穩態所需的時間增長。

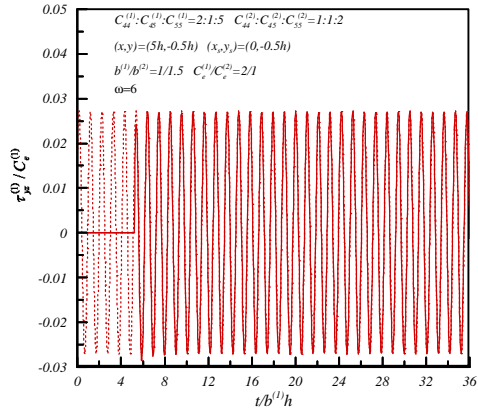


圖十三

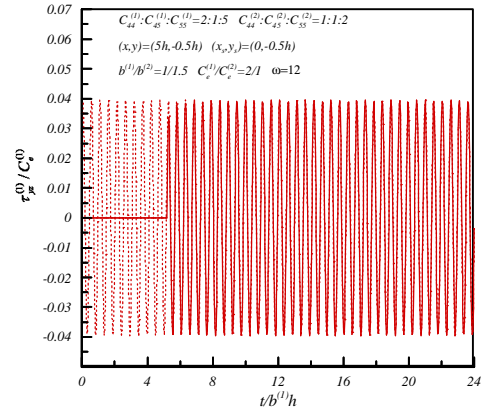


圖十四

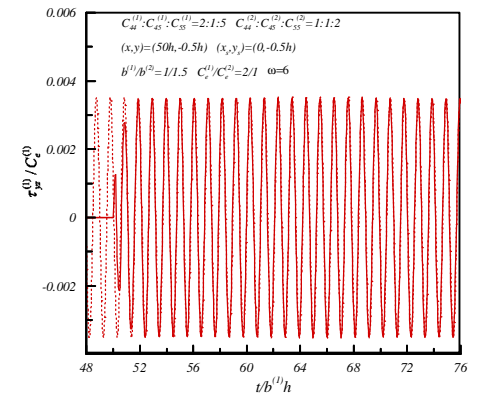
圖十五與圖十六為慢速下層材料在不同頻率下近場之暫態與穩態解，圖十七與圖十八為慢速下層材料在不同頻率下中場之暫態與穩態解。觀察上述二種狀況的結果，近場由於觀察點很接近波源，主波很快地就通過觀察點，暫態很快就能趨於穩態，隨著頻率的增加，只是讓暫態能愈快趨於穩態。而中場由於觀察點距離波源較遠，在低頻的情況下，當入射波到達觀察點之後，在很短的時間內有很多個反射波也到達觀察點，其應力值會發生震盪，此時暫態 $H(t)$ 的效應大於 $\sin \omega t$ 的影響，所以需要很長的時間，暫態才能逐漸趨於穩態。然而隨著頻率由低頻至高頻，其 $\sin \omega t$ 的影響愈大，暫態愈容易趨於穩態。除此，對慢速下層材料之近場及中場其應力值，皆會隨著頻率的增加而變大。



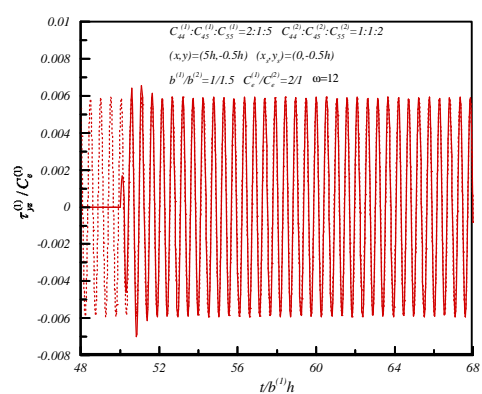
圖十五



圖十六



圖十七

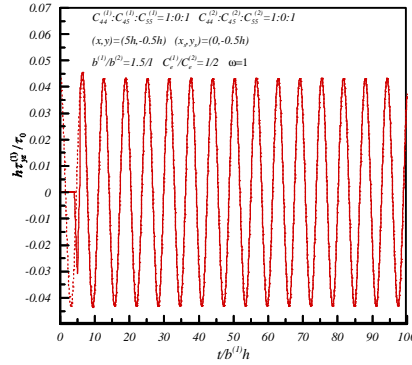


圖十八

3. 等向性快速下層材料問題：

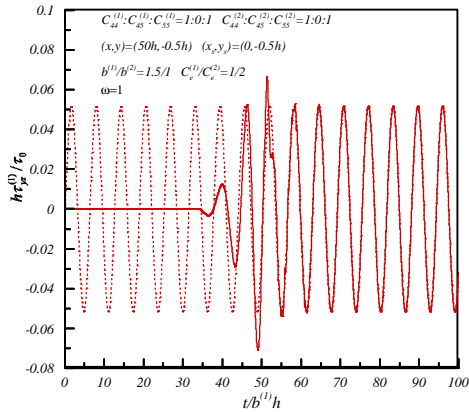
之前所探討的結果皆為慢速下層材料，即上層波傳速度大於下層波傳速度。但當上層波傳速度小於下層波傳速度時，因為波在經過界面進入下層材料後，會快速的抵達接收點，此時反射之圓柱波未到達觀察點位置，為了滿足材料接合之邊界應力與位移連續條件，反射波與透射波間須以一額外波加以連續，稱此額外波為頭前波(Head wave)。

圖十九為等向性快速下層材料近場之暫態解，由圖中可以看出第一個波到達的時間不到 5.0，其值即為頭前波所貢獻的值。由於在近場的暫態解中其頭前波所貢獻的值有限，所以同樣在幾個主波經過後，暫態解亦迅速趨於穩態。

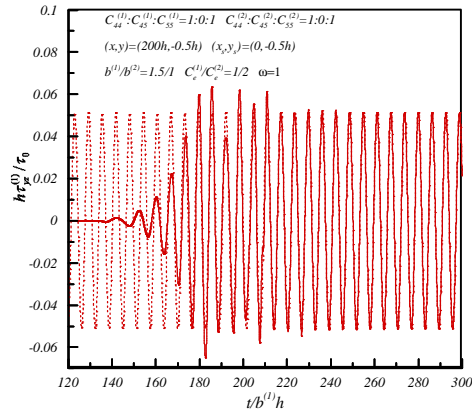


圖十九

圖二十與圖二十一分別為等向性快速下層材料中場及遠場之暫態解，由圖得知頭前波經由第二層材料到達觀察點的效應會因距離的加長而更加明顯，因為在第一個主波到達之前，已經有非常多的頭前波抵達觀察點位置，使得應力值產生震盪。當第一個主波到達之後，隨後有許多個反射波也到達觀察點其震盪更為嚴重。由於頭前波的效應，使得暫態解趨於穩態所需的時間，將會隨著觀察點的距離增加而加長。



圖二十

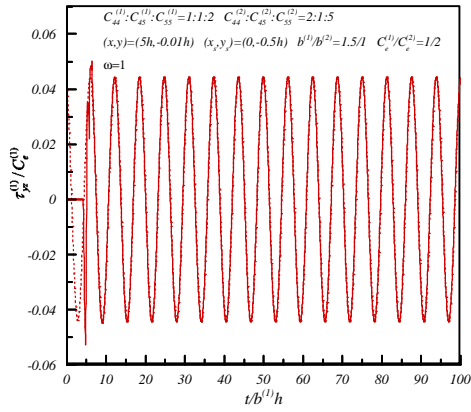


圖二十一

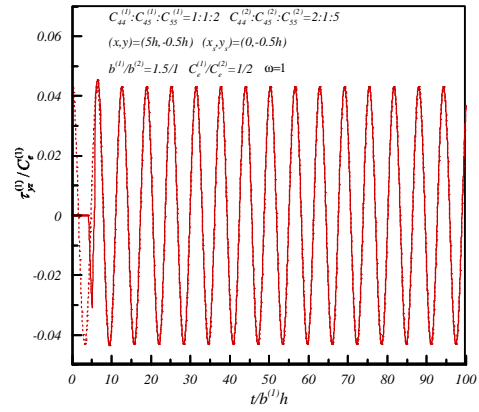
4. 異向性快速下層材料問題：

圖二十二至圖二十四為異向性快速下層材料在不同垂直高度觀察點下近場之暫態解，其觀察點在 x 軸方向距離波源為板厚的 5 倍。同樣由於觀察點在 y 軸方向位置的不同，經由座標轉換後，其厚度及觀察點與負載的距離有所改變，所以頭前波、入射波與反射波到達觀察點的時間都不一樣，其值的大小也都不相同。由圖二十二至圖二十四可知觀察點越接近上表面，其頭前波到達的時間越晚，越接近下面的邊界，其頭前波到達的時間越早。同樣由於在近場的暫態解中其頭前波所貢獻的值有限，所以在幾個主波經過後，暫態解亦迅速

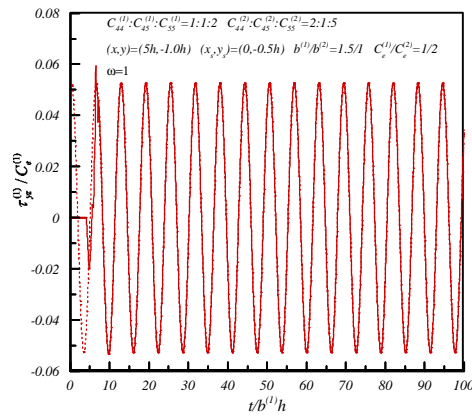
趨於穩態。



圖二十二

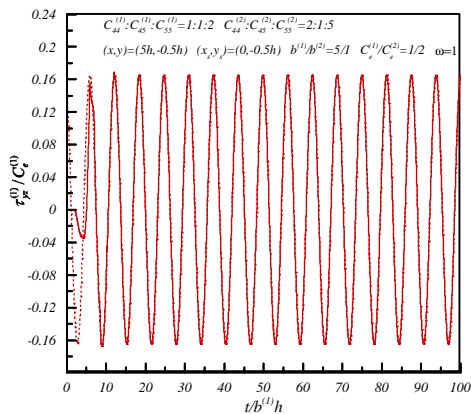


圖二十三

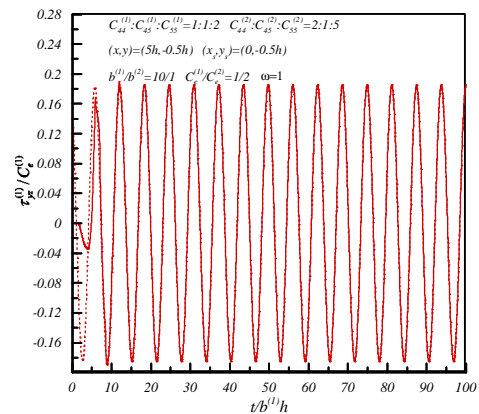


圖二十四

圖二十五與圖二十六為異向性快速下層材料在不同慢度 b 下近場之暫態解，當上層材料與下層材料的慢度 $b^{(1)}/b^{(2)}$ 比值變大時，因經過觀察點的頭前波數目增多，其頭前波的效應明顯的增加，使得其暫態解趨於穩態所需的時間稍長，但因為是近場的緣故，頭前波所貢獻的值有限，所以暫態解亦迅速趨於穩態。

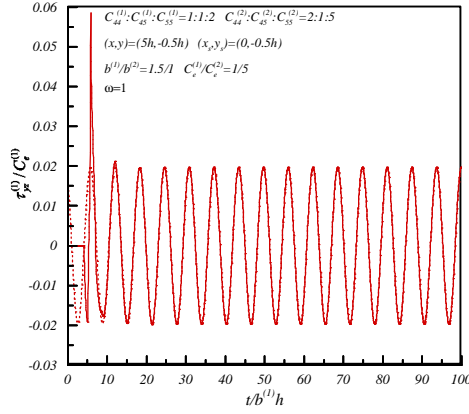


圖二十五

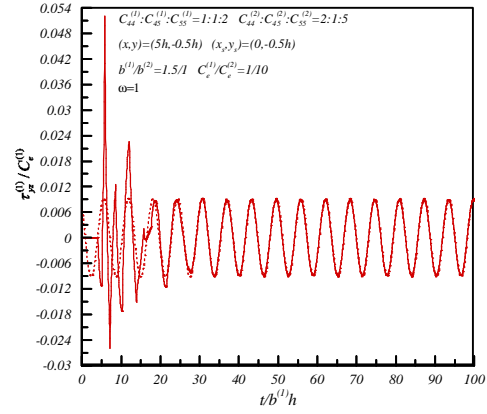


圖二十六

圖二十七與圖二十八為異向性快速下層材料在不同 C_e 下近場之暫態解，由圖中可看出當 $C_e^{(1)}/C_e^{(2)}$ 比值愈小時，暫態趨於穩態所需的時間愈長，且應力振幅亦愈小。

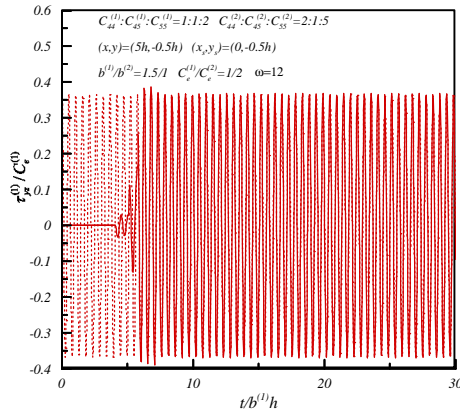


圖二十七

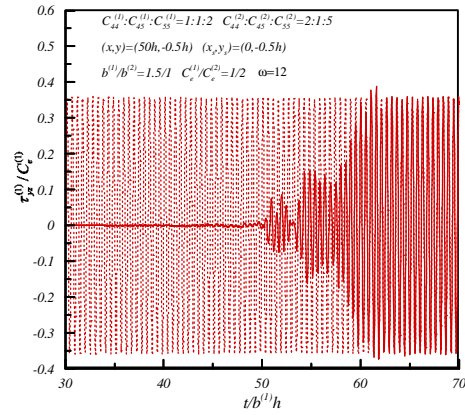


圖二十八

圖二十七與圖二十八主要是比較在高頻率下，近及中場暫態解的變化，由上述各圖觀察之結論可知，觀察點愈遠、頻率愈大，則趨於穩態所需的時間愈長，而且大多數暫態趨於穩態的時間都是在第一個圓柱波到達時間與最後一個頭前波到達時間之間，亦即在 $t = b^{(1)}x$ 與 $t = b^{(1)2}x/b^{(2)}$ 之間，此與 Liu and Ma(2002)所獲得之結論相同。



圖二十七



圖二十八

根據本文研究的結論，有以下幾點成果：

- 1 本文利用拉普拉斯轉換將波動控制方程式轉換為在拉普拉斯轉換域的常微分方程式，再配合異向性半無窮域之邊界條件及初始條件，可解出在轉換域中的暫態解，最後利用 Cagniard-de Hoop method 作逆轉換而得到時域中的半平面暫態解，得到本文處理異向性問題的基本解。再運用座標轉換技巧，將反平面異向性問題轉換成相對之等向性問題。
- 2 對於入射、反射及折射間的關係，考慮兩完美接合半無窮域問題，運用界面應力與位移連續條件，得到三者之關係式。除此，並以廣義射線理論說明 Ing and Chen(2003)中所獲得的單位步階函數解析解，其實是將每個入射波、反射波與折射波直接以數學形式表示的結果。
- 3 對於暫態和穩態的理論解析，本文利用 Ing and Chen(2003)中所獲得的單位步階函數解析解與時域簡諧波負載作摺積，得到異向性層域承受反平面動力簡諧載荷時之暫態解。而受時域簡諧負載的穩態解，則是直接對波動控制方程式作傅立葉轉換，最後得到以傳統波數積分表示之穩態解。
- 4 經過數值計算之後，發現等向性與異向性薄層材料在不同觀察點、剪力模數比、慢度比或頻率之下，其近場、中場與遠場的應力皆會由暫態逐漸趨近至穩態。

- 5 本文探究異向性層域之暫態響應趨近穩態解之變化行為，可以幫助瞭解暫態效應的重要

性，讓設計者在設計時必須考量材料受動力載荷的暫態影響，而能進一步保證結構之安全性。雖然本文僅解析了反平面問題，但在許多特殊的物理現象上，仍會表現與平面問題類似的結果，故在學術研究上應有一定的參考與應用價值。